

Bài 4. Số nguyên tố

A. Tóm tắt lý thuyết

4.1. Số nguyên tố

Số tự nhiên lớn hơn 1 không có ước nào khác ngoài 1 và chính nó được gọi là số nguyên tố.

4.2. Tính chất

a) Cho p là số nguyên tố. Khi đó với mọi số nguyên a thì hoặc a chia hết cho p hoặc a nguyên tố cùng nhau với p .

b) Nếu tích ab của hai số tự nhiên chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p .

4.3. Định lý cơ bản

Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích thành tích những thừa số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự của các thừa số.

Sự phân tích $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, trong đó p_1, p_2, \dots, p_k là những số nguyên tố khác nhau, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là những số nguyên dương, gọi là sự phân tích tiêu chuẩn của a .

B. Một số dạng bài toán thường gặp

Dạng 1. Tìm số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp:

- Xét các trường hợp có thể có của một số nguyên tố theo một tính chất nào đó
- Sử dụng định lý cơ bản

Ví dụ 1. Tìm số nguyên tố p sao cho $8p^2 + 1$ và $8p^2 - 1$ cũng là những số nguyên tố.

Giải

Ta lần lượt xét các trường hợp:

- Nếu $p = 3$ thì $8p^2 + 1, 8p^2 - 1$ theo thứ tự là 73 và 71, cùng là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ là số phải tìm.

- Nếu $p = 3k \pm 1$ thì $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 8(9k^2 \pm 6k) + 9$ chia hết cho 3.

Như vậy $p = 3$ là số nguyên tố duy nhất phải tìm.

Ví dụ 2. Tìm số nguyên tố p sao cho $2p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Giải

Giả sử $2p + 1 = n^3, n > 1$.

Khi đó $p \neq 2$ và $2p = n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$.

Do $n^2 + n + 1 > 3$ và do tính duy nhất của sự phân tích tiêu chuẩn của $2p$ nên

$$\begin{cases} n - 1 = 2 \\ n^2 + n + 1 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ p = 13 \end{cases}$$

Vậy $p = 13$ là số nguyên tố duy nhất cần tìm.

Dạng 2. Chứng minh một số nguyên là hợp số

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa của hợp số
- Xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra với một số nguyên tố

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với n là một số tự nhiên lớn hơn 1, $n^4 + n^2 + 1$ là hợp số.

Giải

Ta có:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^4 + 2n^2 + 1) - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 + n)(n^2 + 1 - n).$$

Vì $n^2 + 1 + n$ và $n^2 + 1 - n$ là những số tự nhiên lớn hơn 1 nên $n^4 + n^2 + 1$ là hợp số.

Ví dụ 2. Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố và $2p + 1$ cũng là một số nguyên tố.

Chứng minh rằng $4p + 1$ là một hợp số.

Giải

Vì $p \geq 5$ nên p không chia hết cho 3, do đó ta có thể viết p dưới dạng $p = 3k \pm 1$.

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, do vậy trường hợp này không xảy ra.

- Nếu $p = 3k - 1, k \geq 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$.

Do $4k - 1 \geq 3$ nên $4p + 1$ là hợp số.